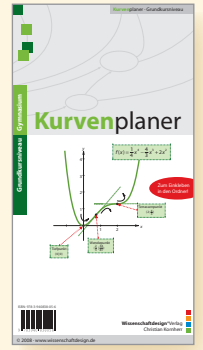


Das visuelle System zur Kurvendiskussion **immer griffbereit!** Im selbstklebenden Etui zum Einkleben

Mit dem praktischen **Zick-Zack-Falz-System** haben Sie eine bestmögliche Übersicht über die einzelnen Schritte der Kurvendiskussion.

**Anschauliche Schaubilder** und Flussdiagramme illustrieren die bei einer Kurvendiskussion nötigen Fallunterscheidungen und Entscheidungsregeln.



**Kurvenplaner**  
**Grundkursniveau Gymnasium**  
 ISBN: 978-3-940838-05-6  
 26 cm x 84 cm. Vierfarbig.  
 Mit praktischer Klebetasche.  
**€ 9,90.**

Der *Kurvenplaner* stellt als praktisches Klappsystem mit Zick-Zack-Falz übersichtlich und systematisch die einzelnen Schritte einer Kurvendiskussion dar. Aufbau und Design des Kurvenplaners sind optimal auf die Anforderungen einer Kurvendiskussion abgestimmt. Anschauliche Diagramme bilden mit ihren Entscheidungsregeln und Verzweigungen visuell und mathematisch präzise das allgemeine Vorgehen bei der Diskussion ganzzahliger Funktionen ab.

„... Auch aus Sicht der Hochschule für angehende Studenten unbedingt zu empfehlen.“  
 Dr. Helmut Pruscha, Professor für Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München

### 5. Monotonieverhalten, Extrempunkte

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

**Erste Ableitung  $f'$**  bestimmt **Monotonieverhalten** und Art der Punkte mit waagrechter Tangente

Steigung der Tangente an der Stelle  $x$ :  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Erste Ableitung Null setzen. **Punkte mit waagrechter Tangente  $f'(x) = 0$**

Wo liegen die Punkte mit waagrechter Tangente?

**Lage**

- Löse  $f'(x) = 0$  nach  $x$  auf  $\Rightarrow x$ -Koordinate(n):  $x_0$
- Setze  $x_0$  in  $f(x)$  ein!  $\Rightarrow y$ -Koordinate(n):  $y_0$

**Extrempunkte**

**$f''$ -Kriterium**

$f'(x_0) = 0$  und

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$  hat (lokales) Minimum an der Stelle  $x_0$
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$  hat (lokales) Maximum an der Stelle  $x_0$

Kriterium anwendbar, wenn zweite Ableitung an der Stelle  $x_0$  existiert und  $f'(x_0) \neq 0$

**Monotonieverhalten**

**Tiefpunkt (TIP) an der Stelle  $x_0$ :**

$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Monotonieverhalten ändert sich am Tiefpunkt!
$f'(x)$	-	0	+
Graph $G_f$	fällt	TIP	steigt

**Hochpunkt (HOP) an der Stelle  $x_0$ :**

$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Monotonieverhalten ändert sich am Hochpunkt!
$f'(x)$	+	0	-
Graph $G_f$	steigt	HOP	fällt

**Terrassenpunkt (TEP) bei  $x_0$ :**

$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Monotonieverhalten ändert sich am Terrassenpunkt nicht!
$f'(x)$	+	0	+
Graph $G_f$	steigt	TEP	steigt

**Ableitung(en) von  $f$**

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$   
 $f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$   
 $f'''(x) = 6x - 8$

**Notwendige Bedingung für Extrempunkte:  $f'(x) = 0$**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0$   
 $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \text{Binomische Formel}$   
 $x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$   
 $y_3 = f(x_3) = f(0) = 0 \Rightarrow P_3(0|0) \checkmark$   
 $y_4 = f(x_4) = f(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow P_4(2|\frac{4}{3}) \checkmark$

Lösen Sie die Gleichung  $f'(x) = 0$  nach  $x$  auf...  
 ... und setzen Sie die berechneten  $x$ -Werte in die **Ausgangsfunktion  $f$**  ein!  
 Bitte nicht in die falsche Funktion einsetzen!

**„Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt?“**

**Monotonieverhalten**  
 Das Monotonieverhalten in den Bereichen zwischen den kritischen Stellen wird durch Einsetzen **beliebiger**  $x$ -Werte in die erste Ableitung bestimmt.

$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	-	0	+	0
Graph $G_f$	fällt	TIP	steigt	TEP
			steigt	

$f'(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 4(-1) = -9 < 0$   
 $f'(1) = 1 - 4 + 4 = 1 > 0$   
 $f'(3) = 27 - 4 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 3 > 0$

**$f''$ -Kriterium (Hinreichende Bedingung)**  
 Die gefundenen  $x$ -Werte werden in die zweite Ableitung eingesetzt:

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$  TIP  
 $f''(2) = 12 - 16 + 4 = 0 \Rightarrow ?$

Das  $f''$ -Kriterium ist nur dann anwendbar, wenn  $f''(x_0) \neq 0$  ist!

Der praktische Teil auf der rechten Seite zeigt den **Prototyp** einer Kurvendiskussion am Beispiel einer ganz rationalen Funktion.